



Отримано: 14 квітня 2025 р.

Прорецензовано: 29 травня 2025 р.

Прийнято до друку: 05 червня 2025 р.

email: zinkevych.tetyana@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0002-4200-6609>

email: lisovska@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0001-8675-3975>

email: sviderska.inna@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0001-7044-7359>

DOI: [http://doi.org/10.25264/2311-5149-2025-37\(65\)-82-87](http://doi.org/10.25264/2311-5149-2025-37(65)-82-87)

Кудик Т. О., Лісовська В. П., Свідерська І. М. Моделювання деякими системами диференціальних рівнянь. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка»* : науковий журнал. Острог : Вид-во НаУОА, червень 2025. № 37(65). С. 82–87.

УДК: 330.42:336:517.9-047.58

JEL-класифікація: G17, C61

Кудик Тетяна Олексіївна,

кандидат економічних наук, доцент,

доцент кафедри корпоративних фінансів і контролінгу

Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

Лісовська Валентина Петрівна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

професор кафедри вищої математики

Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

Свідерська Інна Миколаївна,

кандидат економічних наук, доцент,

доцент кафедри корпоративних фінансів і контролінгу

Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИМИ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У роботі розглядаються макромоделі, які розвиваються з часом, а також математичні моделі, що їх описують. Такими є динамічні моделі. В динамічних моделях усі змінні (в загальному випадку) залежать від часу. Час виступає в ролі незалежної змінної.

Розрізняють динамічні моделі із неперервним і дискретним часом, тобто неперервні і дискретні моделі. Залежно від типу динаміки системи, що досліджується, динамічні моделі можуть підрозділятися на дискретні і неперервні. У дискретних динамічних моделях застосовують системи різницьових рівнянь або самі різницьові рівняння; а у неперервних динамічних моделях використовують як диференційні рівняння, так і, зокрема, системи диференційних рівнянь. В деяких окремих випадках зустрічаються системи зі змішаною динамікою. В цьому випадку для опису таких систем використовують диференційно-різницьові рівняння.

Різницьові рівняння і системи рівнянь використовуються успішно у моделюванні динамічних процесів (в економіці, банківській справі та ін.).

У наведеній роботі вивчаємо саме системи диференціальних рівнянь, а також досліджуємо зведення таких систем до одного диференціального рівняння другого порядку, зокрема показуємо їх застосування до розв'язання задач фінансового прогнозування. Дослідимо дискретну модель другого порядку, а саме модель ділового циклу, яку запропонували А. Хансен та П. Самуельсон, і вона була доповнена Дж. Хіксом.

Пізніше ця модель дістала назву моделі Самуельсона-Хікса. Це дискретна модель. Також відома модель економічного циклу Кальдора, яка є об'єктом численних досліджень в сфері економічної динаміки. В основі моделі Кальдора міститься припущення, що інвестиції в односекторній економіці залежать від національного доходу, але схильність до інвестицій зменшується, якщо дохід відхиляється від свого «рівноважного» значення. Окрім того, вважається, що для наведеного рівня доходу інвестиції зменшуються зі зростанням капіталу. Ця модель також описується системою диференціальних рівнянь першого порядку. Ми, зокрема, детально досліджуємо модель економічного циклу А. Філіпса, тобто, значну увагу в роботі приділяємо аналізу конкретно цієї моделі, яка є неперервним аналогом моделі Самуельсона-Хікса.

Ключові слова: диференційні рівняння, системи диференціальних рівнянь, динамічні моделі, модель економічного циклу Філіпса, дохід, інвестиції, фінансове прогнозування, фінансове моделювання, моделювання.

Tetiana Kudyk,

PhD in Economics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Corporate Finance and Controlling
the Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

Valentyna Lisovska,

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher mathematics
the Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

**Inna Sviderska,***PhD in Economics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Corporate Finance and Controlling
the Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman*

MODELING BY SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

This article examines macro models that evolve over time, along with the mathematical models that describe them. These are dynamic models, wherein all variables generally depend on time, which acts as an independent variable.

Dynamic models can be categorized into continuous and discrete time models, reflecting the nature of the system's dynamics. In discrete dynamic models, systems of difference equations or individual difference equations are employed. Conversely, continuous dynamic models utilize differential equations, particularly systems of differential equations. In certain scenarios, systems with mixed dynamics exist, for which differential equations are also used.

Difference equations and systems thereof are effectively applied in modeling dynamic processes in fields such as economics and banking.

In this study, we focus on systems of differential equations and investigate their reduction to a single second-order differential equation. Specifically, we demonstrate their application to solving financial forecasting problems. Furthermore, we analyze a discrete second-order model, namely the business cycle model proposed by A. Hansen and P. Samuelson and later refined by J. Hicks.

This model subsequently became known as the Samuelson-Hicks model, and it is inherently discrete. Another notable model of the economic cycle is the Kaldor model, which has been the subject of extensive research in economic dynamics. The Kaldor model posits that investment in a single-sector economy is contingent upon national income, with the propensity to invest decreasing when income deviates from its equilibrium value. Additionally, it assumes that for a given level of income, investment diminishes with the growth of capital. This model is also represented by a system of first-order differential equations. Notably, we delve into the economic cycle model of A. Phillips, devoting considerable attention to its analysis. The Phillips model serves as a continuous analog of the Samuelson-Hicks model.

Keywords: *Differential equations, systems of differential equations, dynamic models, Phillips economic cycle model, income, investment, financial forecasting, financial modeling, simulation.*

Постановка проблеми. Розглянемо систему математичних співвідношень між параметрами об'єктів економічної системи, що описується математичними засобами у вигляді системи диференціальних рівнянь, якими описуються закономірності основних суттєвих властивостей економічного процесу.

Зокрема, методи розв'язання систем диференціальних рівнянь широко застосовуються до дослідження макроекономічних динамічних моделей, до розв'язання задач математичного та фінансового моделювання.

Вони мають широке застосування в економічній теорії. Значну кількість економічних законів, різних економіко-фінансових явищ та процесів побудовано за допомогою аналітичних методів, що потім вивчаються математичними методами. Зокрема, однією з таких математичних моделей є модель, коли економічний процес описується саме за допомогою систем диференціальних рівнянь.

Застосування систем диференціальних рівнянь в економіці представлено, зокрема, в таких динамічних моделях, які зображують економічні процеси з урахуванням неперервного часу: динамічна модель економічного циклу Філіпса, модель Пу, модель Вальраса рівноваги ринку, макромодель неокласичного зростання, модель економічного циклу Кальдора, кейнсіанська модель економічного циклу Самуельсона-Хікса. В моделі Самуельсона-Хікса учасниками є домогосподарства і фірми. Вище названі моделі описуються системами диференціальних рівнянь або самими диференціальними рівняннями. Розглянемо деякі з цих класичних моделей, а саме ті, що описуються системами диференціальних рівнянь та які зводяться до одного рівняння другого порядку. В теорії диференціальних рівнянь доведено теореми, за допомогою яких точні розв'язки лінійних систем визначаються в аналітичному вигляді.

Однією з найбільш відомих дискретних моделей є модель ділового циклу, запропонована А. Хансеном та П. Самуельсоном, в якій функція сукупного попиту описується за допомогою диференціального рівняння першого порядку. Наведена модель була доповнена Дж. Хіксом. Пізніше ця модель дістала назву моделі Самуельсона-Хікса. Це кейнсіанська модель економічного циклу. У цій роботі ми дослідимо модель економічного циклу А. Філіпса, яка являє собою неперервний аналог моделі Самуельсона-Хікса [4].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, у яких необхідним елементом є математичні методи і моделі. При цьому в них змінні набувають неперервних числових значень. Зокрема, є моделі, які описуються диференціальними рівняннями чи системами диференціальних рівнянь.

У економічній літературі питання моделювання різних економічних процесів порушувалися ще у XVI ст. У 1758 р. Ф. Кене розробив першу макроекономічну модель, тоді як у XVIII ст. А. Сміт створив класичну макроекономічну модель, а Д. Рікардо (1772–1823) запропонував модель міжнародної торгівлі. Значний вклад в моделювання ринкової економіки у XIX ст. внесла математична школа (Л. Вальрас,



Ф. Еджворт, О. Курно, К. Менгер, В. Парето, А. Пігу та ін.). Математичні методи моделювання застосовувались дуже широко вже у ХХ ст. Відомі роботи з економіки практично усі пов'язані з моделюванням ринкової економіки (В. Леонтьєв, П. Самуельсон, Р. Солоу, Д. Хікс та ін.). Неоокласична модель економічного зростання Р. Солоу вперше була наведена в 1956 р. у праці нобелівського лауреата Р. Солоу «Внесок до теорії економічного зростання».

Важливим для фахівців, які спеціалізуються в сфері економічної теорії, математичних методів в економіці, макроекономіці, є вивчення якісних методів аналізу динамічних моделей. Сучасний економіст повинен вміти моделювати і досліджувати динаміку процесів в економічних, соціальних та інших системах. Відомі праці Дж. Кейнса та його послідовників, які відіграли особливу роль у становленні макроекономічної теорії [2].

Мета і завдання дослідження. Усі динамічні макромоделі, як аналітичні, так і ті, які допускають лише кількісні дослідження, умовно поділяють на дві групи: моделі економічного зростання (описуються лінійними та нелінійними різницевиими рівняннями першого порядку [1]) та моделі економічного циклу, або їх ще називають моделями економічних коливань (це дискретні моделі другого порядку). Мета наведеної роботи полягає у дослідженні моделей, які описуються лінійними диференціальними рівняннями першого порядку та системами лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що застосовуються у фінансовому моделюванні, в фінансовому прогнозуванні. Такими є модель Самуельсона-Хікса, модель Р. Харрода, модель економічного циклу Філіпса, яку детально вивчимо в статті. Розглянемо питання знаходження загального розв'язку системи диференціальних рівнянь, що є моделлю Філіпса, та вивчимо властивості траєкторій цієї моделі.

Виклад основного матеріалу. Нехай математичною моделлю є лінійні і нелінійні моделі, причому такі, що описуються диференціальними рівняннями першого та другого порядку. Ці моделі мають певний інтерес, але вони мають обмежені застосування. Наприклад, за допомогою рівнянь першого порядку можна моделювати такі процеси, стан яких в кожен момент часу можна характеризувати лише однією змінною (її ще прийнято називати *фазовою змінною*). Але реальні процеси, що моделюються, зазвичай характеризуються декількома фазовими змінними. Кожна з цих змінних задовольняє своєму диференціальному або різницевому рівнянню, які пов'язані між собою та в сукупності утворюють систему різницевих чи диференціальних рівнянь. У багатьох задачах економіки, математики, техніки тощо важливо визначити декілька функцій, пов'язаних між собою декількома диференціальними рівняннями [3].

В статті ми розглянемо такі моделі, які описуються за допомогою систем-диференціальних рівнянь, що зводяться до одного диференціального рівняння другого порядку. В теорії звичайних диференціальних рівнянь детально описано методи знаходження загального розв'язку диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Однією з найбільш відомих моделей другого порядку є модель ділового циклу. І найбільш вивченою є дискретна модель другого порядку, запропонована А. Хансеном та П. Самуельсоном і доповнена Дж. Хіксом. Це модель ділового циклу. Пізніше ця модель стала називатись моделлю Самуельсона-Хікса. Це дискретна модель. Розгляд питання розділимо на наступні пункти. Спочатку вивчимо модель економічного циклу А. Філіпса (вона є неперервним аналогом моделі Самуельсона-Хікса [3]) та покажемо, які вона має недоліки. Потім перейдемо до розгляду моделі Р. Харрода, модифікованої А. Філіпсом.

Як відомо, модель економічного циклу Філіпса описується рівняннями:

$$1) C(t) = cY(t) + c_0, \quad (1)$$

$$2) \frac{dK(t)}{dt} = \alpha(vY(t) - K(t)), \quad (2)$$

$$3) \frac{dY(t)}{dt} = \beta \left(C(t) + \frac{dK(t)}{dt} - Y(t) \right), \quad (3)$$

де $\alpha, \beta, v > 0$ — параметри. Звернемо увагу на те, що рівняння (2) та (3) є диференціальними рівняннями першого порядку та разом утворюють систему двох диференціальних рівнянь. Рівняння (1) — дискретне (кінцеве) рівняння. Звернемо увагу на те, що в модель Самуельсона-Хікса, на відміну від моделі Філіпса, $K(t)$ не входить.

Система диференціальних рівнянь (1)-(3) зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку виду

$$Y'' + (\alpha - \alpha\beta v + \beta s)Y' + (\alpha\beta s)Y = \alpha\beta c_0. \quad (4)$$



Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. В теорії диференціальних рівнянь доведено теорему, згідно з якою загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку є сумою загального розв'язку $\bar{Y}(t)$ відповідного лінійного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку $Y^*(t)$ відповідного неоднорідного рівняння. Вигляд загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння залежить від вигляду коренів відповідного характеристичного рівняння.

Таким чином, можна дійти висновку, що знайшовши $Y(t)$, можна потім визначити $K(t)$ і $C(t)$, підставляючи знайдене $Y(t)$ в (2) і (1). Потім можна побудувати відповідні траєкторії. Властивості траєкторій неперервної моделі залежать від параметрів і багато в чому схожі з властивостями траєкторій в моделі Самуельсона-Хікса.

Оскільки описані вище моделі економічного циклу є лінійними, то їхні розв'язки можна знайти явно. Це дозволяє їх аналізувати та досліджувати на стійкість розв'язків.

Здійснюючи аналіз розв'язків та порівнюючи ці моделі з емпіричними даними, вчені помітили недоліки моделей. Тому економістами були запропоновані більш реалістичні моделі циклу, зокрема, нелінійні. Розглянемо модель Філіпса: Філіпс за основу взяв простішу лінійну модель зростання Р. Харрода, в якій припустив:

1) нехай дохід пропорційний капіталу, тобто $Y = aK$. Отже, дохід є лінійною виробничою функцією;

2) нехай збереження (S) пропорційне доходу: $S = sY$;

3) а інвестиції (I) є, так звані, «ідеальним» акселератором без запізнення: $I = vY'$;

4) виконується умова рівноваги.

Враховуючи (1)-(4), дістаємо рівняння $vY' = sY$, або $Y' = \frac{s}{v}Y$.

Розв'яжемо це рівняння, відокремлюючи змінні:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{s}{v}Y, \quad \frac{dY}{Y} = \frac{s}{v}dt.$$

Дістанемо $\int \frac{dY}{Y} = \int \frac{s}{v}dt$, звідки маємо $\ln Y(t) = \frac{s}{v}t + \ln C$,

$$\text{або } \ln Y(t) - \ln C = \frac{s}{v}t, \quad \ln \frac{Y(t)}{C} = \frac{s}{v}t.$$

Розв'язком останнього рівняння є функція

$Y(t) = C \cdot e^{\frac{s}{v}t}$. Звідси робимо висновок, що змінна Y , а тому і змінні S, I, K зростають за експоненціальним законом з однаковим темпом $\frac{s}{v}$.

А. Філіпс відмовився від умови 4), замінив її рівнянням адаптації

$$Y' = a(I - S) = a(I - sY), a > 0, \quad (5)$$

та замінив умову 3), враховуючи, що співвідношення акселератора може виконуватися лише наближено завдяки запізненню у часі, на рівняння

$$I' = b(vY' - I), b > 0. \quad (6)$$

Об'єднуючи умову 1), 2) та рівняння (5), (6), дістаємо спрощену систему Філіпса, яка замінює (3):

$$\begin{cases} Y = aK, \\ S = sY, \\ Y' = a(I - sY), \\ I' = b(vY' - I). \end{cases} \quad (7)$$

Розв'яжемо цю систему зведенням її до одного диференціального рівняння другого порядку. Для цього продиференціюємо третє рівняння системи (7): $Y'' = a(I' - sY')$. Підставимо в одержане рівняння замість I' значення з останнього рівняння системи, маємо $I' = bvY' - bI$.

Тепер знайдемо із третього рівняння системи (7) значення I :

$$I = sY + \frac{1}{a}Y'.$$

Підставимо це значення в останнє рівняння системи (7): $I' = bvY' - bsY - \frac{b}{a}Y'$,



і остаточно, після підстановки його в рівняння для Y'' , прийдемо до лінійного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$Y'' = abvY' - absY - bY' - asY', \text{ або}$$

$$Y'' + (b + as - abv)Y' + absY = 0. \quad (8)$$

Розв'яжемо це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Для цього складемо відповідне характеристичне рівняння, попередньо введемо позначення

$$A = b - abv + as, \quad B = abs,$$

тоді рівняння (8) набуде вигляду

$$Y'' + AY' + BY = 0. \quad (9)$$

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0.$$

Залежно від того, який знак має дискримінант $D = A^2 - 4B$, відповідно записується загальний розв'язок рівняння (9). Отже, якщо:

1). $D > 0$, тобто $A^2 - 4B > 0$, або $(b - abv + as)^2 - 4abs > 0$, тоді корені дійсні, різні

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad \lambda_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad (10)$$

а

$$\bar{Y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11)$$

де λ_1, λ_2 визначаються рівностями (10), C_1, C_2 — довільні постійні.

$$\text{Тоді } K(t) = \frac{1}{a} Y(t), \quad C(t) = cY(t) + c_0$$

2). Якщо $D = 0$, тобто $A^2 - 4B = 0$, або $(b - abv + as)^2 = 4abs$, тоді корені дійсні, однакові:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{A}{2} = -\frac{1}{2}(b - abv + as), \quad \text{а}$$

$$\bar{Y}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{1}{2}(b - abv + as)t}. \quad (12)$$

3). Якщо $D < 0$, тобто $A^2 - 4B < 0$, тоді корені комплексні, взаємоспряжені :

$$\lambda_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}i, \quad \lambda_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}i, \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ і}$$

$$\bar{Y}(t) = e^{-\frac{A}{2}t} (C_1 \cos \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}t + C_2 \sin \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}t).$$

Висновки. Автори проаналізували та узагальнили матеріали публікацій і застосували методи розв'язання систем диференціальних рівнянь до розв'язання лінійних моделей економічного циклу. В теорії диференціальних рівнянь відомі різні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь. Одним із таких методів є метод зведення системи диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Особливу увагу приділено процесам, що моделюються за допомогою апарату систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Представлено модифіковану модель економічного циклу Філіпса та проаналізовано властивості загальних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що описує модель Філіпса. Основний акцент зроблено на застосуванні диференціальних рівнянь другого порядку до розв'язання системи диференціальних рівнянь у моделі Філіпса.

Системи диференціальних рівнянь є цінним інструментом у фінансовому прогнозуванні підприємств, у фінансовому моделюванні, оскільки дозволяють будувати точні моделі, що враховують динамічні зміни та взаємозв'язки фінансових показників.

**Література:**

1. Грисенко, М. В. (2007). *Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі*: Навч. посібник. Либідь.
2. Hrysenko, M. V. (2007). *Matematyka dlya ekonomistiv: Metody i modeli, pryklady i zadachi*: Navchalnyi posibnyk [Mathematics for economists: Methods and models, examples and problems: Study guide]. Lybid. [in Ukrainian].
3. Зінкевич Т.О., Лісовська В.П., Мельник О.О. (2015). Логістичні моделі в задачах економічної динаміки. *Зб.: Ринок цінних паперів України*, 9-10, 127-134.
4. Zinkevych, T. O., Lisovska, V. P., Melnyk, O. O. (2015). Logistychni modeli v zadachah ekonomichnoi dynamiky [Logistic models in problems of economic dynamics]. *Zbirnyk: Rynok tsinnykh paperiv Ukrainy [Securities Market of Ukraine]*, 9-10, 127-134. [in Ukrainian].
5. Лісовська В.П., Зінкевич Т.О. (2021). *Динамічні системи в економіці*: монографія. Київ: КНЕУ.
6. Lisovska, V. P., Zinkevych, T. O. (2021). *Dynamichni systemy v ekonomitsi: monohrafiya* [Dynamic systems in economics: Monograph]. KNEU. [in Ukrainian].
7. Лісовська В.П., Кудик Т.О., Васильєва Д.О. (2021). Моделювання лінійними різницевиими рівняннями першого порядку. *Науковий вісник УжНУ. Серія: Міжнародні економічні відносини та світове господарство*, 37, 55-60.
8. Lisovska, V. P., Kudyk, T. O., Vasylieva, D. O. (2021). Modelyuvannya liniynymy riznytsevymy rivnyannyamy pershogo poryadku [Modeling with linear difference equations of the first order]. *Naukoviy visnyk UzhNU. Seriya: Mizhnarodni ekonomichni vidnosyny ta svitove gospodarstvo [Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Series: International Economic Relations and World Economy]*, 37, 55-60 [in Ukrainian].
9. Лісовська В.П., Неня О.І. (2014). Про перманентність дискретної системи хижак-жертва з монотонною функцією впливу. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія Фізико-математичні науки : зб. наук. праць*, 11, 132-142.
10. Lisovska, V. P., Neny, O. I. (2014). Pro permanentnist' dyskretnoi systemy khyzhak-zhertva z monotonno. Funktsieyu vplyvu [On the permanence of a discrete predator-prey system with a monotonic influence function]. *Matematychme ta komp'yuterne modelyuvannya. Seriya Fizyko-matematychni nauky: zb.nauk. prats [Mathematical and Computer Modeling. Series Physical and Mathematical Sciences: Collected Scientific Works]*, 11, 132-142. [in Ukrainian].