



Отримано: 11 серпня 2025 р.

Прорецензовано: 20 серпня 2025 р.

Прийнято до друку: 22 серпня 2025 р.

email: o.v.magda@gmail.com

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0002-4732-004X>

email: o.horokhova@knute.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0001-7444-6839>

email: natalia.danyliuk@oa.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0002-5696-1893>DOI: [http://doi.org/10.25264/2311-5149-2025-38\(66\)-205-211](http://doi.org/10.25264/2311-5149-2025-38(66)-205-211)

Магда О. В., Горохова О. М., Данилюк Н. М. Застосування групової класифікації одного класу квазілінійних рівнянь відносно алгебр Лі розмірності не вище ніж три в дослідженні поведінки споживачів. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка»*: науковий журнал. Острог: Вид-во НаУОА, вересень 2025. № 38(66). С. 205–211.

УДК: 517.958; 330.4; 004.9

JEL-класифікація: C6, M30, L86

Магда Олена Вікторівна,*кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей**Національного технічного університету України**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»***Горохова Олена Миколаївна,***кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення та кібербезпеки**Державного торговельно-економічного університету***Данилюк Наталя Миколаївна,***доктор філософії (спеціальність 051 Економіка),**доцент кафедри менеджменту та маркетингу**Національного університету «Острозька академія»*

ЗАСТОСУВАННЯ ГРУПОВОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ ОДНОГО КЛАСУ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВІДНОСНО АЛГЕБР ЛІ РОЗМІРНОСТІ НЕ ВИЩЕ НІЖ ТРИ В ДОСЛІДЖЕННІ ПОВЕДІНКИ СПОЖИВАЧІВ

У статті розглянуто задачу групової класифікації одного класу квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з двома незалежними змінними відносно нерозкладних розв'язних тривимірних алгебр Лі. Побудовано повний опис рівнянь, інваріантних відносно таких алгебр, та наведено відповідні реалізації. Показано, що ці рівняння можуть бути використані для моделювання поведінки споживачів, зокрема для виявлення інваріантних характеристик, що зберігаються при зміні маркетингового середовища. Застосування симетрії дозволяє спростити моделі споживчої поведінки, зменшити кількість змінних та підвищити інтерпретованість результатів. У дослідженні використано сучасні засоби символічних обчислень, зокрема пакети Mathematica, що дозволило автоматизувати процес класифікації рівнянь. Отримані результати мають прикладне значення для маркетингових досліджень, зокрема при побудові профілів споживачів, оцінці ефективності рекламних кампаній та виявленні ключових факторів впливу на купівельну поведінку.

Ключові слова: квазілінійні рівняння гіперболічного типу, тривимірні алгебри Лі, поведінка споживачів, алгоритми класифікації, символічні обчислення.

Olena Magda,*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,**Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory**National Technical University of Ukraine**“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”***Olena Horokhova,***Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,**Associate Professor of the Department of Software Engineering and Cybersecurity**State University of Trade and Economics***Natalia Danyliuk,***PhD in Economics, Senior Lecturer, Department of Management and Marketing,**National University of Ostroh Academy*

APPLICATION OF GROUP CLASSIFICATION OF ONE CLASS OF QUASILINEAR EQUATIONS WITH RESPECT TO LIE ALGEBRAS OF DIMENSION NOT HIGHER THAN THREE IN THE RESEARCH OF CONSUMER BEHAVIOR



This paper presents the group classification of a specific class of second-order quasilinear hyperbolic equations with two independent variables, focusing on non-decomposable, solvable, three-dimensional Lie algebras. This class of equations can be seen as a broad generalization of the nonlinear d'Alembert, Liouville, sine-Gordon, and Tzitzeica equations. The theoretical foundation of this work dates back to Sophus Lie, who pioneered the group analysis of differential equations, establishing that the principal classifying features of such equations are their symmetry properties. Accordingly, this research provides a complete description of the equations invariant under such algebras, along with their specific realizations.

The study demonstrates the direct applicability of this mathematical framework to the modeling of consumer behavior. The central premise is that the group symmetries and invariance found in the equations correspond to the relative stability of consumer behavior patterns, even amidst a changing marketing environment. By identifying these invariant characteristics, researchers can uncover fundamental trends that are not immediately apparent. The use of symmetries enables the simplification of complex consumer behavior models by reducing the number of variables, thereby enhancing their interpretability.

To perform the classification, the study employed modern symbolic computation tools, specifically Mathematica packages, to automate the process. The findings have practical significance for marketing research, offering applications in consumer profiling, campaign effectiveness evaluation, and the identification of key factors that influence purchasing behavior.

Keywords: quasilinear equations of hyperbolic type, three-dimensional Lie algebra, consumer behavior, classification algorithms, symbolic computation.

Постановка проблеми. У розвитку соціально-економічних систем актуальним є питання пошуку своєрідних стійких патернів у поведінці економічних суб'єктів (зокрема споживачів), що здатні залишатися незмінними при відносній зміні ряду зовнішніх умов. Такими умовами можуть бути цінові коливання, використання різних каналів комунікації або ж наявність трендів у споживанні. Попри те, що споживачі як економічні суб'єкти здатні індивідуально робити власний вибір на користь ціни, місця, часу купівлі або ж каналу дистрибуції, можна виокремити такі групи споживачів, які однаково реагують на ті чи ті цінові, продуктові, комунікаційні, емоційно-ціннісні стимули (наприклад, знижки, пробні зразки продукту, конкурси тощо). Такі групи споживачів математично можна розглядати як інваріантні закономірності. В цьому контексті рівняння з найвищими симетрійними властивостями здатні описувати зміни, що залишаються стабільними під впливом перетворень. Алгебри Лі при цьому дають змогу знаходити аналітичні розв'язки таких рівнянь.

Проблема групової класифікації квазілінійних рівнянь гіперболічного типу є однією із центральних задач теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь, які містять «довільний елемент» (звичай, це довільна функція одного або кількох аргументів) [1; 2]. Одним із визначних класів рівнянь є диференціальні рівняння з частинними похідними порядку два виду

$$u_{tt} = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x) \quad (1)$$

Зокрема, до рівнянь (1) відносяться рівняння Ліувілля, Д'аламбера, sin-Гордона та інші, які використовуються в різних моделях дійсних фізичних процесів та економічних явищ.

У наведеній статті досліджено задачу групової класифікації квазілінійних рівнянь другого порядку

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad (2)$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, F – довільна гладка функція невідомих аргументів, $F_{u_x u_x} \neq 0$. Ці аргументи є підвидом рівнянь (1) відповідно тривимірних алгебр Лі, які є нерозкладними і розв'язними.

Застосування алгебр Лі для розв'язування рівнянь дає можливість знаходити приховані інваріанти (наприклад, сегменти за значенням в інноваціях, ефект соціального підтвердження, цінова еластичність тощо), формувати класи еквівалентності, зокрема досліджувати ринки із схожими патернами поведінки споживачів, та використовувати групові перетворення для складання прогнозів змін споживчої поведінки. Це робить можливим спрощення складних багатофакторних моделей поведінки споживачів завдяки тому, що прояви споживчої поведінки можна звести до декількох інваріантних структур, тобто сегментів із стабільними характеристиками.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблема групової класифікації певних хвильових рівнянь, які є одновимірними і нелінійними, розглядається багатьма авторами: Г. Блуманом та С. Кумей [1], Е. Пуччі та М. К. Сальваторі [3; 4], В. Ф. Еймсом, Е. Адамсом, Р. Дж. Лонером [5], А. Ороном, Ф. Розенау [6], М. Торрізі, А. Валенті [7]. Науковці С. Спічак, В. Стогній, І. Копась в [8] знайшли неперервні перетворення класу лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів, здійснили групову класифікацію цих рівнянь, у результаті якої виділили всі нееквівалентні підкласи рівнянь, що мають алгебру інваріантності ширшу, ніж ядро основних алгебр інваріантності рівнянь. О. Локазюк в [9] розв'язала задачу повної групової класифікації класу нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з двома залежними змінними над дійсним полем. В роботі [10] С. Гурака та О. Локазюк, використовуючи класичну теорему Лі про реалізацію алгебр Лі векторними полями на прямій, суттєво



спростили, перевірили і підтвердили доведення відомих результатів про класифікацію класів $(1+1)$ – вимірних нелінійних еволюційних рівнянь вигляду $u_{tt} = H(u_{xx})u_t + uu_x = H(u_{xx})$.

Задача групової класифікації хвильових рівнянь еквівалентна питанню класифікації реалізації рівнянь в класі інфінітезимальних операторів алгебр інваріантності з точністю до еквівалентності, яка є групою еквівалентності ε досліджуваного рівняння (2).

Класифікацію для рівнянь виду

$$u_{tt} = u_{xx} - u^2 u_x + A(x)u_x + D(x)u \ln |u| + uD(x), \quad (3)$$

було проведено в [11] й одержано опис рівнянь виду (3), які допускають тривимірні розв'язні розкладні алгебри Лі.

Мета і завдання дослідження. Метою наведеної статті є вивчення можливості вибору рівнянь із класу диференціальних рівнянь виду (2) з найвищими симетрійними властивостями. Завданнями дослідження є групова класифікація рівняння виду (2) відносно тривимірних алгебр Лі, що є нерозкладними і розв'язними, та знаходження реалізації цих алгебр і функції F в інваріантних рівняннях.

Виклад основного матеріалу. Питання групової класифікації одного класу квазілінійних рівнянь відносно алгебр Лі знаходять своє практичне застосування в моделюванні розповсюдження інформації про продукт (наприклад, поширення інформації через рекламу, аналіз швидкості споживчої реакції на зміни в маркетинговому середовищі). Крім цього, алгебри Лі дають можливість знаходити групові симетрії в рівняннях, а це, в свою чергу, враховує можливість визначення типових патернів споживчої поведінки або сегментів споживачів [13; 14].

Оскільки симетрії є трансформаціями, що не змінюють суть самого явища, то в контексті споживчої поведінки актуальною стає інваріантність як ситуація, коли поведінка споживача залишається відносно незмінною, незважаючи на деякі зміни в маркетинговому середовищі. В цьому контексті важливо визначити певні закономірності в споживчій поведінці, що дають можливість класифікувати і спростувати моделі поведінки споживачів через редукцію змінних на основі симетрій.

Відповідно до результатів, наведених в [11], кожна однопараметрична група ліівської симетрії рівняння (2) породжується інфінітезимальним генератором виду

$$X = (\beta t + \beta_1)\partial_t + (\beta x + \beta_2)\partial_x + [h(x)u = r(t, x)]\partial_u, \quad (4)$$

де β, β_1, β_2 – дійсні сталі та функції $h = hx, r = r(t, x), F = F(t, x, u, u_x)$ задовольняють умові:

$$\begin{aligned} r_{tt} - r_{xx} - \frac{d^2 h}{dx^2} u - 2 \frac{dh}{dx} u_x + (h - 2\beta)F - \\ - (\beta t + \beta_1)F_t - (\beta x + \beta_2)F_x - (hu + r)F_u - \\ - \left(r_x + \frac{dh}{dx} u + (h - \beta)u_x \right) F_{u_x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При цьому, групу еквівалентності рівняння (2) формують перетворення

$$\bar{t} = \delta t + \delta_1, \quad \bar{x} = \varepsilon x + \delta_2, \quad v = \vartheta(x)u + \eta(t, x) \quad (6)$$

де $\{\delta, \delta_1, \delta_2\} \subset \mathbb{R}, \delta \neq 0, \varepsilon = \pm 1, \vartheta \neq 0$.

Також існують перетворення (6), які зводять оператор (4) до одного із таких семи операторів:

$$\begin{aligned} Y_1 &= l(t\partial_t + x\partial_x) (l \neq 0); \quad Y_2 = \partial_t + l\partial_x (l > 0); \\ Y_3 &= \partial_x; \quad Y_4 = \partial_t; \quad Y_5 = \partial_t + f(x)u\partial_u (f \neq 0); \\ Y_6 &= f(x)u\partial_u (f \neq 0); \quad Y_7 = f(t, x)\partial_u (f \neq 0). \end{aligned}$$

Відмітимо, що в класі операторів (4) не існують реалізації алгебр $so(3)$ та $sl(2, \mathbb{R})$.

Покажемо, що серед нелінійних рівнянь вигляду (2) не існують такі алгебри інваріантності, які є ізоморфними ліівським алгебрам з нетривіальним фактором Леві. Розгляд реалізацій лише тих ліівських алгебр, що є розв'язними, не призводить до втрати загальності.

Зупинимось більш докладно на другому кроці алгоритму згідно [11]. В теорії абстрактних ліівських алгебр з точністю до ізоморфізму розрізняють сім нерозкладних розв'язних ліівських алгебр розмірності три над $\mathbb{R}$ $A_{3,i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle (i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ [12]. Такі ліівські алгебри завжди містять абелів ідеал розмірності два. Тому для опису реалізації ліівських алгебр розмірності три використовуються результати, які були отримані під час групової класифікації рівнянь виду (2) відносно алгебри $A_{2,1}$. Оскільки розширення всіх реалізацій алгебри $A_{2,1}$ до реалізацій тих ліівських алгебр, які мають розмірність три і є нерозкладними та розв'язними, здійснюються аналогічно, розглянемо більш детально випадок реалізації $A_{2,1}^{10}$.



Неважко переконатися, що перетворення

$$\bar{t} = \delta t + \delta_1, \quad \bar{x} = \varepsilon \delta x + \delta_2, \quad v = \vartheta(x)u + \eta(t, x) \quad (7)$$

де $\{\delta, \delta_1, \delta_2\} \in R$, $\delta \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\vartheta \neq 0$ залишають реалізації $A_{2.1}^{10} = \langle \partial_t, f(x)u \partial_u \rangle$ ($f \neq 0$) еквівалентними. Тому, безпосередні обчислення показують, що з точністю до дії перетворень (7), вивчаючи можливості розширення реалізації $A_{2.1}^{10} = \langle e_1, e_2 \rangle$ до реалізації алгебр $A_{3.1} = \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_3 \rangle$, можемо вважати, що оператор e_3 дорівнює одному із операторів:

$$1) e_3 = t \partial_t + x \partial_x + r(t, x), \quad \partial_u \quad (r \neq 0 \text{ або } r = 0);$$

$$2) e_3 = \partial_x + r(t, x), \quad \partial_u \quad (r \neq 0 \text{ або } r = 0);$$

$$3) e_3 = r(t, x), \quad \partial_u \quad (r \neq 0 \text{ або } r = 1).$$

Нехай $e_1 = \partial_t$, $e_2 = f(x)u \partial_u$, а e_3 дорівнює першому із наведених вище операторів. Тоді

$$[e_1, e_3] = \partial_t + r_t \partial_u,$$

$$[e_2, e_3] = -xf' u \partial_u - rf \partial_u$$

Аналіз комутаційних співвідношень для алгебр $A_{3,i}$ ($i = 3, 4, 5, 6$) показує, можливість розширення реалізації алгебр $A_{2.1}^{10}$ до $A_{3.5}$, коли $r = 0$, $xf' = -f$, $A_{3.6}$ коли $r = 0$, $xf' = f$, та $A_{3.7}$, коли $r = 0$, $xf' = -qf$ ($0 < |q| < 1$). Отже, цей випадок приводить до наступного:

$$A_{3.5} : e_1 = \partial_t, \quad e_2 = x^{-1} u \partial_u, \quad e_3 = t \partial_t + x \partial_x;$$

$$A_{3.6} : e_1 = \partial_t, \quad e_2 = x u \partial_u, \quad e_3 = t \partial_t + x \partial_x;$$

$$A_{3.7} : e_1 = \partial_t, \quad e_2 = |x|^{-q} u \partial_u, \quad e_3 = t \partial_t + x \partial_x \quad (0 < |q| < 1).$$

У випадку, коли оператор e_3 співпадає з e_2 з $A_{3.6}$, то

$$[e_1, e_3] = r_t \partial_u,$$

$$[e_2, e_3] = -f' u \partial_u - rf \partial_u$$

З вивчення комутаційних співвідношень для алгебр $A_{3,i}$ ($i = 3, 4, \dots, 6$) впливає неможливість розширення реалізації $A_{2.1}^{10}$ до реалізацій наведених алгебр.

Подібний результат отримаємо й тоді, коли оператор $e_3 = r(t, x)$, ∂_u ($r \neq 0$ або $r = 1$).

Нехай, тепер, $e_1 = f(x)u \partial_u$, $e_2 = \partial_t$. Якщо $e_3 = t \partial_t + x \partial_x + r(t, x) \partial_u$ ($r \neq 0$ або $r = 0$), то із наступних співвідношень

$$[e_1, e_3] = -(rf + xf' u) \partial_u,$$

$$[e_2, e_3] = \partial_t + r_t \partial_u$$

впливає можливість розширення реалізації $A_{2.1}^{10}$ у наведеному випадку лише до алгебри $A_{3.5}$:

$$\langle x^{-1} u \partial_u, \partial_t, t \partial_t + x \partial_x \rangle,$$

яка збігається з реалізацією алгебри $A_{3.5}$ з точністю до визначених базисних операторів.

Якщо $e_3 = \partial_x + r(t, x) \partial_u$ ($r \neq 0$ або $r = 0$), то $[e_1, e_3] = -(f' u + rf) \partial_u$, $[e_2, e_3] = r_t \partial_u$, і аналіз визначальних комутаційних співвідношень алгебр $A_{3,i}$ ($i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) у цьому випадку показує неможливість розширення реалізації $A_{2.1}^{10}$ до реалізацій вказаних алгебр.

У випадку $e_3 = r(t, x) \partial_u$, ($r \neq 0$ або $r = 1$) одержимо аналогічний результат.

Отже, у випадку реалізації $A_{2.1}^{10}$ можливе розширення в класі операторів (4) лише до наступних трьох реалізацій:

$$L^1 \sim A_{3.5}, \quad L^1 = \langle \partial_t, x^{-1} u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle;$$

$$L^2 \sim A_{3.6}, \quad L^2 = \langle \partial_t, x u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle;$$

$$L^3 \sim A_{3.7}, \quad L^3 = \langle \partial_t, |x|^{-q} u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle \quad (0 < |q| < 1).$$

Застосування рівняння (5) виявило, що наведені реалізації є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь (2), не еквівалентними до рівнянь (3). Нижче наведено їх список:

$$L^1 : u_{tt} = u_{xx} - u^{-1} u_x^2 - 2x^{-2} u \ln |u| + x^{-2} u G(\omega), \quad \omega = x u^{-1} u_x + \ln |u|;$$

$$L^2 : u_{tt} = u_{xx} - u^{-1} u_x^2 + x^{-2} u G(\omega), \quad \omega = x u^{-1} u_x - \ln |u|;$$

$$L^3 : u_{tt} = u_{xx} - u^{-1} u_x^2 - q(q+1)x^{-2} u \ln |u| + u x^{-2} G(\omega), \quad \omega = x u^{-1} u_x + q \ln |u| \quad (0 < |q| < 1),$$



де G – будь-яка функція, залежна від одного аргументу.

Зображення решти рівнянь, інваріантних відносно нерозкладних тривимірних розв'язних ліівських алгебр отримано в аналогічний спосіб.

Наведемо частковий перелік тих нелінійних рівнянь, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні нерозкладні розв'язні алгебри Лі, реалізації цих алгебр та функцій F у відповідних рівняннях. Зокрема,

$A_{3,4}$ – інваріантні рівняння

$$A_{3,4}^2 = \langle \partial_u, -t\partial_u, \partial_t + k\partial_x + u\partial_u \rangle \quad (k \geq 0):$$

$$F = e^t G(\eta, \omega), \quad \eta = x - kt, \quad \omega = e^{-t} u_x;$$

$$A_{3,4}^3 = \left\langle |t|^{\frac{1}{2}} \partial_u, -|t|^{\frac{1}{2}} \partial_u, t\partial_t + x\partial_x + \frac{3}{2}u\partial_u \right\rangle:$$

$$F = -\frac{1}{4}t^{-2}u + u_x^{-1}G(\xi, \omega), \quad \xi = tx^{-1}, \quad \omega = x^{-1}u_x^2;$$

$$A_{3,4}^4 = \langle kx^{-1}u\partial_u, \partial_t - kx^{-1}\ln|x|u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle \quad (k > 0):$$

$$F = -3ktx^{-3}u - 2x^{-2}u\ln|u| - u^{-1}u_x^2 + x^{-2}uG(\omega),$$

$$\omega = xu^{-1}u_x + \ln|u| + ktx^{-1};$$

$$A_{3,4}^5 = \left\langle e^{ktx^{-1}}\partial_u, \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + (u + te^{ktx^{-1}})\partial_u \right\rangle \quad (k > 0):$$

$$F = k^2x^{-4}u(t^2 + x^2) + 2x^{-1}(ktx^{-1} + 1)u_x + 2ke^{ktx^{-1}}x^{-1}\ln|x| + x^{-1}e^{ktx^{-1}}G(\omega),$$

$$\omega = e^{-ktx^{-1}}(u_x + ktx^{-2}u).$$

$A_{3,5}$ – інваріантні рівняння

$$A_{3,5}^1 = \langle \eta^{|m-1|}\partial_u, \partial_t + k\partial_x, t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u \rangle \quad (k > 0, \quad m \neq 1)$$

$$F = (k^2 - 1)(m - 1)(m - 2)\eta^{-2}u + \eta^{m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |\eta|^{-m}[\eta u_x - (m - 1)u], \quad \eta = x - kt;$$

$$A_{3,5}^2 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + x\partial_x \rangle:$$

$$F = u_x^2 G(u);$$

$$A_{3,5}^3 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u \rangle \quad (m \neq 0):$$

$$F = |u|^{1-\frac{2}{m}} G(\omega), \quad \omega = |u_x|^m |u|^{1-m};$$

$$A_{3,5}^4 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + x\partial_x + \partial_u \rangle:$$

$$F = e^{-2u} G(\omega), \quad \omega = e^u u_x;$$

$$A_{3,5}^5 = \langle \partial_t, x^{-1}u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle:$$

$$F = -u^{-1}u_x^2 - 2x^{-2}u\ln|u| + x^{-2}uG(\omega),$$

$$\omega = xu^{-1}u_x + \ln|u|;$$

$$A_{3,5}^6 = \left\langle \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, e^{ktx^{-1}}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u \right\rangle \quad (k > 0):$$

$$F = kx^{-4}u[kt^2 - 2tx + kx^2] + 2ktx^{-2}u_x + x^{-1}e^{ktx^{-1}}G(\omega),$$

$$\omega = e^{-ktx^{-1}}(u_x + ktx^{-2}u);$$

$$A_{3,5}^7 = \langle \varphi(t)\partial_u, \psi(t)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \quad (\varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0):$$

$$F = \varphi'\varphi''u + u_x G(t, \omega),$$

$$\omega = e^{-x}u_x, \quad \varphi''\psi - \varphi\psi'' = 0.$$



Під час виведення формул цих інваріантних рівнянь застосовано сучасний інструментарій інформаційних технологій, як у теоретичному аналізі, так і в практичній реалізації обчислень та візуалізації результатів. Зокрема, за допомогою пакетів SymmetryReduction, LieAlgebra програмного забезпечення Mathematica, що входить до Computer Algebra System (CAS) [15; 16; 17], знайдено симетрії диференціальних рівнянь і автоматизовано процес класифікації рівнянь.

Висновки. Таким чином, знайдено повний опис рівнянь вигляду (2), інваріантних відносно нерозкладних розв'язних ліівських алгебр розмірності три. Запропоновані розрахунки можуть бути використані в процесі визначення класифікації типів споживачів на основі інваріантності, коли на протигагу кластерному аналізу застосовують дані про симетрії в споживчій поведінці. Також за допомогою алгебр Лі можна знаходити інваріанти Лі, тобто нові змінні, що поєднують старі змінні і, таким чином, представити модель в більш простій формі. Це, у свою чергу, уможливило побудову не лише точних, але й більш зрозумілих математичних моделей, за допомогою яких можна пояснити, як та чи та змінна впливає на купівельну поведінку. В результаті, такі моделі мають прикладне значення в маркетингових дослідженнях, наприклад, при побудові профілів споживачів, оцінці ефективності кампаній, визначення факторів впливу на результуючу змінну.

Література:

1. Bluman, G., Kumei, S. (1989). *Symmetries and differential equations*. New York: Springer, 412. [in English].
2. Ванєєва, О.О. (2017). Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями (за матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 5 липня 2017 року). *Вісник НАН України*, 9, 33-40. <https://doi.org/10.15407/visn2017.09.033>.
3. Vanyeyeva, O.O. (2017). *Klasyfikatsiya dyferentsial'nykh rivnyan' za symetriynymy vlastyvostyamy (za materialamy naukovooho povidomlennya na zasidanni Prezydiyi NAN Ukrayiny 5 lypnya 2017 roku)* [Classification of differential equations by symmetry properties (based on the materials of the scientific report at the meeting of the Presidium of the NAS of Ukraine on July 5, 2017)]. *Visnyk NAN Ukrayiny* [Bulletin of the NAS of Ukraine], 9, 33-40. <https://doi.org/10.15407/visn2017.09.033> [in Ukrainian].
4. Pucci, E. and Salvatori, M.C. (1986). Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 21(2), 147-155. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90027-2). [in English].
5. Pucci, E. (1986). Group analysis of the equation. *Riv. Mat. Univ. Parma*, (4) 12, 71-87. [in Italian].
6. Ames, W.F., Adams, E., Lohner, R.J. (1981). Group properties of. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 16(5-6), 439-447. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(81\)90018-4](https://doi.org/10.1016/0020-7462(81)90018-4). [in English].
7. Oron, A., Rosenau, Ph. (1986). Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations. *Physics Letters A*, 118(4), 172-176. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90250-1. [in English].
8. Torrisi, M., Valenti, A. (1985). Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 20(3), 135-144. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(85\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0020-7462(85)90007-1). [in English].
9. Спічак, С.В., Стогній, В.І., Копась, І.М. (2022). Групова класифікація одного класу (2+1)-вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів. *Буковинський математичний журнал*, 10(2), 240-248. <https://doi.org/10.31861/bmj2022.02.19>.
10. Spichak, S.V., Stohniy, V.I., Kopas', I.M. (2022). Hrupova klasyfikatsiya odnogo klasu (2+1)-vymirnykh liniynykh rivnyan' tsinoutvorennya aziys'kykh optsiyoniv [Group classification of one class of (2+1)-dimensional linear equations of pricing of Asian options]. *Bukovyns'kyi matematychnyy zhurnal* [Bukovynskyi Mathematical Journal], 10(2), 240-248. <https://doi.org/10.31861/bmj2022.02.19> [in Ukrainian].
11. Локазьук, О.В. (2021). Ліівські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. *Доповіді Національної академії наук України*, 5, 3-11. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003>.
12. Lokazyuk, O.V. (2021). Liiivsk'i symetriyi liniynykh system dvokh zvychnykh dyferentsial'nykh rivnyan' druhoho poriadku [Lie symmetries of linear systems of two ordinary differential equations of the second order]. *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 5, 3-11. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003> [in Ukrainian].
13. Гурака, С.Т., Локазьук, О.В. (2024). Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 21(1), 35-58. <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.539>.
14. Huraka, S.T., Lokazyuk, O.V. (2024). Hrupova klasyfikatsiya dyferentsial'nykh rivnyan': alhebrayichnyy pidkhd [Group classification of differential equations: an algebraic approach]. *Zbirnyk prats' Instytutu matematyky NAN Ukrayiny* [Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine], 21(1), 35-58. <https://doi.org/10.3842/trim.v21n1.539> [in Ukrainian].
15. Лагно, В., Магда, О., Жданов, Р. (2001). Про інваріантність квазілінійних рівнянь гіперболічного типу відносно тривимірних алгебр Лі. *Праці Інституту математики НАН України*, 36, 136-159.
16. Lahno, V., Mahda, O., Zhdanov, R. (2001). Pro invariantnist' kvaziliniynykh rivnyan' hiperbolichnoho typu vidnosno tryvymirnykh alhebr Li [On the invariance of quasilinear equations of hyperbolic type with respect to three-dimensional Lie algebras]. *Pratsi Instytutu matematyky NAN Ukrayiny* [Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine], 36, 136-159 [in Ukrainian].



12. Magda, O. (2000). The group classification of nonlinear wave equations invariant under two-dimensional Lie algebras. *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, 30(1), 165-169. [in English].
13. Shih-Hsien Tseng, Tien Son Nguyen and Ruei-Ci Wang (2021). The Lie Algebraic Approach for Determining Pricing for Trade Account Options. *Mathematics*, 9(3), 279. <https://doi.org/10.3390/math9030279>. [in English].
14. Melike Bildirici, Nilgun Guler Bayazit and Yasemen Ucan (2021). Modelling Oil Price with Lie Algebras and Long Short-Term Memory Networks. *Mathematics*, 9(14), 1708. <https://doi.org/10.3390/math9141708>. [in English].
15. Lie Algebras. *WOLFRAM*. <<https://library.wolfram.com/infocenter/ID/677/#downloads>> (2025, July, 31).
16. Computation. Data. Decisions. *WOLFRAM*. <<https://www.wolfram.com/index.en.html?source=footer>> (2025, July, 31).
17. Cohen, Joel. S (2003). *Computer algebra and symbolic computation: mathematical methods*. A K Peters Natick, Massachusetts, 472. [in English].